

**PHIẾU HỌC TẬP SỐ 1: NGUYÊN HÀM**

**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 1. Tìm nguyên hàm các hàm số sau**

1:  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + x^4$

2:  $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

3:  $f(x) = 3\cos x - 3^{x-1}$

4:  $f(x) = \frac{1}{x} - e^{x+1}$

5:  $f(x) = \cos \sqrt{x} dx$

6:  $f(x) = x^3 - 4x + \frac{3}{x}$

7:  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{5}{\sqrt[5]{x}}$

8:  $f(x) = \frac{2x^4 + 2}{x^2}$

9:  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$

10:  $f(x) = \sin^4 x \cos^3 x$

11:  $f(x) = 2 \sin 3x \cos 2x$

12:  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

13:  $f(x) = e^x (e^x - 1)$

14:  $f(x) = e^x \left( 2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$

15:  $f(x) = \tan^2 x$

**Bài 2. Tìm nguyên hàm F(x) của các hàm số f(x) sau thỏa mãn điều kiện tương ứng**

1.  $f(x) = x^3 - 4x + 5 \quad F(1) = 3$

6.  $f(x) = \sin 2x \cos x \quad F'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

2.  $f(x) = 3 - 5 \cos x \quad F(\pi) = 2$

7.  $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 + 5}{x^2} \quad F(1) = 2$

3.  $f(x) = \frac{3 - 5x^2}{x} \quad F(e) = 1$

8.  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 7}{(x+1)^2} \quad F(0) = 8$

4.  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \quad F(1) = \frac{3}{2}$

5.  $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad F(1) = -2$

9.  $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

**Bài 3. Chứng minh rằng F(x) là một nguyên hàm của f(x)**

1.  $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 7x + 120; \quad f(x) = 15x^2 + 8x - 7$

2.  $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 3}); \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

3.  $F(x) = (4x - 5)e^x; \quad f(x) = (4x - 1)e^x$

4.  $F(x) = \tan^4 x + 3x - 5; \quad f(x) = 4 \tan^5 x + 4 \tan^3 x + 3$

5.  $F(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 3}\right); \quad f(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 4)(x^2 + 3)}$

6.  $F(x) = \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}; \quad f(x) = \frac{2\sqrt{2}(x^2 - 1)}{x^4 + 1}$

**Bài 4. Tính các nguyên hàm sau**

1.  $\int (5x - 1)^{11} x dx$

2.  $\int \frac{dx}{(3 - 2x)^5}$

4.  $\int (2x^2 + 1)^7 x dx$

3.  $\int \sqrt{5 - 2x} dx$

5.  $\int \frac{x}{x^2 + 5} dx$

6.  $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$

7.  $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5 + 2x^3}} dx$

8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$

9.  $\int \sin^2 x \cos x dx$

**Bài 5. Tính các nguyên hàm sau**

1.  $\int x \ln(1 + x) dx$

2.  $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$

3.  $\int x \sin 2x dx$

4.  $\int (1 - x) \cos x dx$

5.  $\int e^x \sin 2x dx$

6.  $\int x^2 \cos x dx$

**Bài 6. Tính các nguyên hàm sau**

1.  $\int xe^x dx$

2.  $\int x \cos x dx$

3.  $\int \ln x dx$

4.  $\int (-x^2 + 3x + 1)e^x dx$

5.  $\int x \sin(2x + 1) dx$

6.  $\int (1 - x) \cos x dx$

7.  $\int (1 - 2x)e^x dx$

8.  $\int xe^{-x} dx$

9.  $\int (x + 1) \cos x dx$

10.  $\int e^x \cos x dx$

11.  $\int e^x \sin x dx$

12.  $\int x^2 \cos x dx$

13.  $\int x \cos^2 x dx$

**Bài 7. Tính các nguyên hàm sau**

1.  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

2.  $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$

3.  $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$

4.  $\int \sin \sqrt[3]{x} dx$

5.  $\int e^x \sin(2x + 1) dx$

6.  $\int \cos x \ln(\sin x) dx$

7.  $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

8.  $\int \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx$

9.  $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

10.  $\int e^{\sin x} \cos x dx$

**Bài 8. Tính các nguyên hàm sau**

1.  $\int \tan x dx$

2.  $\int \cot x dx$

3.  $\int \cos^2 x dx$

4.  $\int \sin^2 x dx$

5.  $\int \tan^2 x dx$

6.  $\int \cot^2 x dx$

7.  $\int \sin x \sin 3x dx$

8.  $\int \cos 7x \cos 3x dx$

9.  $\int \sin 5x \cos x dx$

10.  $\int \sin x \sin 2x \cos 5x dx$

11.  $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

12.  $\int \cos 5x \cos 4x \sin 3x dx$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = 2 \sin 2x - \cos x + 1$  có nguyên hàm  $f(x)$  thỏa mãn  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ . Khẳng định nào sau đây là sai ?

**A.**  $f(x)$  có hệ số tự do bằng 0. **B.**  $f(x)$  có hệ số tự do bằng 2. **C.**  $f(1) = -\cos 2x - \sin 1 + 1$ . **D.**  $f(\pi) = \pi - 1$ .

**Câu 2:** Nguyên hàm  $\int x \ln(x+1) dx$  bằng

**A.**  $\frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$       **B.**  $\frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) + \frac{x^2-2x}{4} + C$   
**C.**  $\frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} - x + C$       **D.**  $\frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$

**Câu 3:** Tìm một nguyên hàm  $I$  của hàm số  $y = (2x+1)(x^2+x+4)dx$ .

**A.**  $I = \frac{1}{2}(x^2+x+4)^2 + \sqrt{2}$  **B.**  $I = \frac{1}{3}(x^2+x+4)^2 + 3\sqrt{2}$  **C.**  $I = \frac{1}{4}(x^2+x+4)^2 + 3x$  **D.**  $I = \frac{3}{2}(x^2+x+4)^2 + 9$

**Câu 4:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^3}$ . Một nguyên hàm  $F(x)$  của  $f(x)$  thỏa mãn  $F(1) = -4$  là:

**A.**  $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{2}{x^2} + 4$     **B.**  $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{2}{2x^2} + 4$  **C.**  $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{1}{2x^2} - 4$     **D.**  $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{2}{x^2} - 2$

**Câu 5:** Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x + \ln(x+1)$ . Biết  $F(0) = 1$ , vậy  $F(x)$  bằng:

**A.**  $\frac{x^2-2x}{2} + (x+1)\ln(x+1) + 1$       **B.**  $\frac{x^2-2x}{2} + x\ln(x+1) + 1$   
**C.**  $\frac{x^2-x}{2} + (x+1)\ln(x+1) + 1$       **D.**  $\frac{x^2-2x}{2} + (x^2+1)\ln(x+1) + 1$

**Câu 6:** Một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right)$  thỏa mãn  $F(1) = e$  là:

**A.**  $F(x) = e^x - \frac{1}{x} - 1$     **B.**  $F(x) = e^x - \frac{1}{x} + 1$     **C.**  $F(x) = e^x + \frac{1}{x} - 1$     **D.**  $F(x) = e^x + \frac{1}{x} + 1$

**Câu 7:** Nguyên hàm của hàm số  $y = x^3 \sqrt{x^2+1}$  là:

**A.**  $\frac{1}{15}(3x^2-1)\sqrt{(x^2+1)^3} + C$       **B.**  $\frac{1}{15}(3x^2-2)\sqrt{(x^2+1)^3} + C$   
**C.**  $\frac{1}{5}(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)^3} - \frac{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)}}{3} + C$     **D.**  $\frac{1}{15}(3x^2-4)\sqrt{(x^2+1)^3} + C$

**Câu 8:** Tìm nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+5}}$ :

**A.**  $\frac{1}{8}\sqrt{x^4+5} + C$     **B.**  $\frac{1}{2}\sqrt{x^4+5} + C$     **C.**  $\frac{1}{4\sqrt{x^4+5}} + C$     **D.**  $\frac{1}{8\sqrt{x^4+5}} + C$

**Câu 9:** Một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$  là:

**A.**  $\frac{-1}{x^2}$       **B.**  $x + \ln|x|$       **C.**  $x - \frac{1}{x^2}$       **D.**  $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

**Câu 10:** Hàm số  $f(x) = xe^x$  có các nguyên hàm là:

**A.**  $F(x) = xe^x + e^x + C$     **B.**  $F(x) = x^2e^x + C$     **C.**  $F(x) = x^2 \frac{1}{x+1} e^{x+1} + C$  **D.**  $F(x) = e^x(x-1) + C$

## A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1:** Tìm  $m$  biết  $\int_0^m (2x+5).dx = 6$

**Câu 2:** Tính tích phân sau:  $I = \int_{-1}^1 \frac{2x^2 + 2}{x} dx$

**Câu 3:** Nếu  $\int_1^2 f(x)dx = 2$  thì  $I = \int_1^2 [3f(x) - 2]dx$  bằng bao nhiêu?

**Câu 4:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;10]$  thỏa mãn  $\int_0^{10} f(x)dx = 7$  và  $\int_2^6 f(x)dx = 3$ . Tính

$$P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx.$$

**Câu 5:** Tìm các số  $a, b$  để hàm số  $f(x) = a \sin \pi x + b$  thỏa mãn:  $f(1) = 2$  và  $\int_0^1 f(x)dx = 4$

**Câu 6:** Biết  $\int_0^3 \frac{-x+8}{x^2+5x+4} dx = a \ln b - b \ln a$  với  $a, b > 0$  tính  $\left(\frac{b}{a}\right)^2$

**Câu 8:** Ta có tích phân  $I = 4 \int_1^e x(1 + \ln x)dx = a.e^2 + b$ . Tính  $M = ab + 4(a+b)$  (trong đó  $a, b \in \mathbb{Z}$ )

**Câu 9:** Cho tích phân  $I = \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$ . Đặt  $t = \sqrt{2x+3}$ , ta được  $I = \int_2^3 \frac{m}{t^2+n} dt$

**Câu 10:** Biết rằng  $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ). Tính  $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$ .

**Câu 11:** Có bao nhiêu số  $a \in (0; 20\pi)$  sao cho  $\int_0^a \sin^5 x \cdot \sin 2x dx = \frac{2}{7}$ .

**Câu 12:** Biết  $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ , với  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Tính tích  $a.b$ .

**Câu 13:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;1]$  và thỏa mãn  $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx = 1$ ,  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{6}} f(2x)dx = 13$ . Tính tích

$$\text{phân } I = \int_0^1 x^2 f(x^3)dx.$$

**Câu 14:** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^4 |x^2 - 3x + 2| dx$  ta được kết quả

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm, liên tục trên đoạn  $[1;3]$ , thỏa mãn  $f(x) > 0, \forall x \in R$  và  $f'(x) = f(x).(2x-1)$ , biết  $f(1) = 1$ . Tính  $f(3)$ .

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:**

**Câu 1.** Cho hàm số  $f$  liên tục trên đoạn  $[0;6]$ . Nếu  $\int_1^5 f(x)dx = 2$  và  $\int_1^3 f(x)dx = 7$  thì  $\int_3^5 f(x)dx$  có giá trị bằng

- A. 5.    B. -5.    C. 9.    D. -9.

**Câu 2.** Cho hàm số  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và hai số thực  $a < b$ . Nếu  $\int_a^b f(x)dx = \alpha$  thì tích phân  $\int_{a/2}^{b/2} f(2x)dx$  có giá trị bằng

- A.  $\frac{\alpha}{2}$ .    B.  $2\alpha$ .    C.  $\alpha$ .    D.  $4\alpha$ .

**Câu 3.** Bài toán tính tích phân  $I = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 1} \ln x}{x} dx$  được một học sinh giải theo ba bước sau:

I. Đặt ẩn phụ  $t = \ln x + 1$ , suy ra  $dt = \frac{1}{x} dx$  và

$x$	$1$	$e$
$t$	$1$	$2$

II.  $I = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x + 1} \ln x}{x} dx = \int_1^2 \sqrt{t}(t-1) dt$  III.  $I = \int_1^2 \sqrt{t}(t-1) dt = \left( \sqrt{t^5} - \frac{2}{\sqrt{t}} \right) \Big|_1^2 = 1 + 3\sqrt{2}$ .

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

- A. Bài giải đúng.    B. Sai từ Bước II.    C. Sai từ Bước I.    D. Sai ở Bước III.

**Câu 4.** Xét tích phân  $I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1 + \cos x} dx$ . Thực hiện phép đổi biến  $t = \cos x$ , ta có thể đưa  $I$  về dạng nào sau đây

- A.  $I = -\int_0^{\pi/4} \frac{2t}{1+t} dt$ .    B.  $I = \int_0^{\pi/4} \frac{2t}{1+t} dt$ .    C.  $I = -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{1+t} dt$ .    D.  $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{1+t} dt$ .

**Câu 5.** Nếu  $\int_{-2}^0 (4 - e^{-x/2}) dx = K - 2e$  thì giá trị của  $K$  là

- A. 9.    B. 10.    C. 11.    D. 12,5.

**Câu 6.** Tích phân  $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$  có giá trị bằng

- A.  $-2 \ln 2$ .    B.  $\frac{2 \ln 2}{3}$ .    C.  $-\frac{2 \ln 2}{3}$ .    D. Không xác định.

**Câu 7.** Cho tích phân:  $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{2x} dx$ . Đặt  $u = \sqrt{1 - \ln x}$ . Khi đó  $I$  bằng

- A.  $I = \int_1^0 u^2 du$ .    B.  $I = -\int_1^0 u^2 du$ .    C.  $I = \int_1^0 \frac{u^2}{2} du$ .    D.  $I = -\int_0^1 u^2 du$ .

**Câu 8.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x) \sin x dx$ . Đặt  $u = 2-x$ ,  $dv = \sin x dx$  thì  $I$  bằng

- A.  $-(2-x) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ . B.  $-(2-x) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ . C.  $(2-x) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ . D.  $(2-x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ .

**Câu 9.** Tích phân  $\int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$  bằng

- A.  $\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt.$       B.  $\int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt.$       C.  $\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt.$       D.  $\frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt.$

**Câu 10.** Tích phân  $I = \int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{1}{x(x^4+1)} dx$  bằng

- A.  $\ln \frac{3}{2}.$       B.  $\frac{1}{3} \ln \frac{3}{2}.$       C.  $\frac{1}{5} \ln \frac{3}{2}.$       D.  $\frac{1}{4} \ln \frac{3}{2}.$

**Câu 11.** Tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos 2x dx$  có giá trị bằng

- A.  $-\frac{5\pi}{8}.$       B.  $\frac{\pi}{2}.$       C.  $\frac{3\pi}{8}.$       D.  $\frac{\pi}{8}.$

**Câu 12.** Cho tích phân  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\cos x} \cdot \sin x dx$ . Đặt  $u = \sqrt{3\cos x+1}$ . Khi đó  $I$  bằng

- A.  $\frac{2}{3} \int_1^3 u^2 du.$       B.  $\frac{2}{3} \int_0^2 u^2 du.$       C.  $\frac{2}{9} u^3 \Big|_1^2.$       D.  $\int_1^3 u^2 du.$

**Câu 13.** Cho hàm số  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa  $f(x) + f(-x) = \sqrt{2+2\cos 2x}$ , với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Giá trị của tích

phân  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$  là

- A. 2.      B. -7.      C. 7.      D. -2.

**Câu 14.** Tích phân  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  có giá trị là

- A.  $\frac{\pi}{4}.$       B.  $\frac{\pi}{2}.$       C.  $\frac{\pi}{3}.$       D.  $\pi.$

**Câu 15.** Giá trị của tích phân:  $I = \int_0^1 \frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}} dx$  là

- A.  $\frac{1}{900} [2^{100} - 1].$       B.  $\frac{1}{900} [2^{101} - 1].$       C.  $\frac{1}{900} [2^{99} - 1].$       D.  $\frac{1}{900} [2^{98} - 1].$

**Câu 16.** Giá trị của tích phân:  $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$  là

- A.  $\frac{\pi^2}{2}.$       B.  $\frac{\pi^2}{6}.$       C.  $\frac{\pi^2}{8}.$       D.  $\frac{\pi^2}{4}.$

**Câu 17.** Biết  $I = \int_1^a \frac{x^3 - 2 \ln x}{x^2} dx = \frac{1}{2} + \ln 2$ . Giá trị của  $a$  là

- A. 2.      B.  $\ln 2.$       C.  $\pi.$       D. 3.

**Câu 18.** Kết quả phép tính tích phân  $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$  có dạng  $I = a \ln 3 + b \ln 5$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó

$a^2 + ab + 3b^2$  có giá trị là

- A. 1.      B. 5.      C. 0.      D. 4.

**Câu 19.** Có mấy giá trị của  $b$  thỏa mãn  $\int_0^b (3x^2 - 12x + 11) dx = 6$

- A. 4.      B. 2.      C. 1.      D. 3.

**Câu 20.** Biết rằng  $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = A$ ,  $\int_0^{b\pi} 2 dx = B$  (với  $a, b > 0$ ). Khi đó giá trị của biểu thức  $4aA + \frac{B}{2b}$  bằng

- A.  $2\pi$ .      B.  $\pi$ .      C.  $3\pi$ .      D.  $4\pi$ .

## PHIẾU HỌC TẬP SỐ 3:

## ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG:

## I) Lý thuyết

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi miền  $D = \{x = a, x = b, y = 0, y = f(x)\}$  được tính theo CT

$$S = \int_a^b |f(x)| dx \quad (1)$$

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi miền  $D = \{x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)\}$  được tính theo CT

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (2)$$

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi miền  $D = \{y = f(x), y = g(x)\}$  được tính theo CT

$$S = \int_c^d |f(x) - g(x)| dx \quad (3) \quad (\text{Với } c, d \text{ là các nghiệm của phương trình } f(x) = g(x))$$

Chú ý: Nếu phương trình  $f(x) = g(x)$  có nhiều  $n_0$   $x_1 = c < x_2 < x_3 < \dots < x_n = d$  thì Ct (3) viết lại

$$S = \int_c^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^d |f(x) - g(x)| dx$$

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi miền  $D = \{y = f(x), y = g(x), y = h(x)\}$

Ta tìm hoành độ giao điểm của các đường  $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$  rồi chia ra từng khúc để tính. Tốt nhất là phải vẽ hình để dễ thấy Chẳng hạn,  $f(x) = g(x)$  có 2 nghiệm  $a < c$  và  $g(x) = h(x)$  có hai nghiệm  $c < d$  thì

$$S = \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^d |g(x) - h(x)| dx$$

Chú ý: Trong trường hợp phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = g(x)$  phức tạp thì có thể xét phương trình tung độ giao điểm của chúng, giả sử  $x = \varphi(y); x = \psi(y)$  và phương trình  $\varphi(y) = \psi(y)$  có hai nghiệm  $c < d$

$$\text{thì} \quad S = \int_c^d |\varphi(y) - \psi(y)| dy \quad (4)$$

## II) Bài tập

## A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 0, y = x^3 - 3x^2 + 2, x = 0, x = 2$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 0, y = x^3 - 2x^2 - x + 2$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 1, y = 3 - x$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 0, y = \ln x, x = e$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = 0, y = \ln x, x = 1/e, x = e$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $x = y^3, x = 8, y = 1$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P):  $y = x^2 - 2x + 2$ ; tiếp tuyến của (P) tại  $M(3; 5)$  và trục tung
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường trục Ox, trục Oy; tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \ln x$  tại giao điểm của đồ thị hàm số đó với Ox
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^2 - 2x + 2; y = -x^2 - x + 3$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y^2 = 2x$  và  $x^2 = 2y$
- Tính diện tích hình phẳng của mỗi phần giới hạn bởi các đường  $x^2 + y^2 = 16$  và  $y^2 = 6x$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y^2 = 2x + 1$  và  $y = x - 1$
- Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $x^2 + 3y = 0$  và  $y = -\sqrt{4 - x^2}$
- Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi các đường  $my = x^2$  và  $mx = y^2$  (với  $m > 0$ ). Tính giá trị  $m$  để diện tích  $S = 3$

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:**

**Câu 1.** Diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  được tính theo công thức:

A.  $S = \int_a^b |f(x)| dx$ . B.  $S = \int_a^b f(x) dx$ . C.  $S = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$ . D.  $S = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$ .

**Câu 2.** Diện tích  $S$  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = f_1(x), y = f_2(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  được tính theo công thức:

A.  $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$ . B.  $S = \left| \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \right|$ . C.  $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$ . D.  $S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx$ .

**Câu 3.** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = x^2$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = -1, x = 3$  là:

A. 8. B.  $\frac{28}{3}$ . C.  $\frac{26}{3}$ . D. 28.

**Câu 4.** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường  $y = x^3 + 3x, y = -x$  và đường thẳng  $x = -2$  là:

A.  $\frac{5}{99}$ . B. 12. C.  $\frac{99}{5}$ . D.  $\frac{1}{12}$ .

**Câu 5.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = -5x^4 + 5$  và trục hoành là:

A. 4. B. 8. C. 3108. D. 6216.

**Câu 6.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = \frac{x^3}{1-x^2}; y = x$  là:

A. 1. B.  $1 - \ln 2$ . C.  $1 + \ln 2$ . D.  $2 - \ln 2$ .

**Câu 7.** Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C):  $y = x^2$  và (d):  $y = \sqrt{x}$  là:

A.  $\frac{2}{3}$ . B.  $\frac{4}{3}$ . C.  $\frac{5}{3}$ . D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 8.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x^3 + 11x - 6, y = 6x^2, x = 0, x = 2$  có kết quả dạng

$\frac{a}{b}$  khi đó  $a - b$  bằng

A. 2. B. -3. C. 3. D. 59.

**Câu 9.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị  $y = |x^2 - 4x + 3|$  và  $y = x + 3$  là:

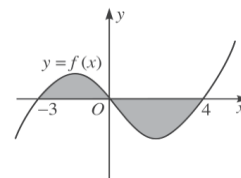
A.  $\frac{55}{6}$ . B.  $\frac{205}{6}$ . C.  $\frac{109}{6}$ . D.  $\frac{126}{5}$ .

**Câu 10:** Cho đồ thị hàm số  $y=f(x)$ . diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình 1) là:

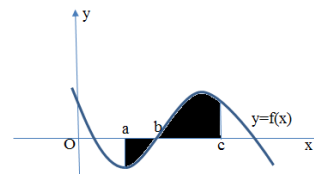
A.  $\int_{-3}^4 f(x) dx$ . B.  $\int_{-3}^0 f(x) dx + \int_4^0 f(x) dx$ . C.  $\int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$ . D.  $\int_0^{-3} f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$ .

**Câu 11:** Diện tích hình phẳng (phần bôi đen trong hình 2) được tính theo công thức:

A.  $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_b^c f(x) dx \right|$  B.  $S = \left| \int_b^c f(x) dx \right| - \left| \int_a^b f(x) dx \right|$  C.  $\int_a^c f(x) dx$  D.  $S = \left| \int_a^c f(x) dx \right|$



Hình 1



Hình 2



**PHIẾU HỌC TẬP SỐ 4:**  
**ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHẦN TÍNH DIỆN TÍCH THỂ TÍCH**

**I) Lí thuyết**

- Khi quay miền  $D = \{ y = f(x); y = 0; x = a; x = b \}$  quanh trục  $Ox$  ta được khối tròn xoay có thể tích được tính

theo công thức: 
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (1)$$

- Khi quay miền  $D = \{ x = g(y); x = 0; y = a; y = b \}$  quanh trục  $Oy$  ta được khối tròn xoay có thể tích được tính

theo công thức: 
$$V = \pi \int_a^b g^2(y) dy \quad (2)$$

- Khi quay miền  $D = \{ y = f(x); y = g(x); x = a; x = b \}$  với  $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a; b]$  quanh trục  $Ox$  ta được khối tròn xoay có thể tích được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_a^b g^2(x) dx - \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] dx \quad (3)$$

Trong đó  $V_1 = \pi \int_a^b g^2(x) dx$  thể tích khối tròn xoay khi quay miền  $D_1 = \{ y = g(x); y = 0; x = a; x = b \}$  quanh trục  $Ox$

$V_2 = \pi \int_a^b f^2(x) dx$  là thể tích khối tròn xoay khi quay miền  $D_2 = \{ y = f(x); y = 0; x = a; x = b \}$  quanh trục  $Ox$

Chú ý: Khi miền  $D$  giới hạn bởi nhiều đồ thị hàm số, để tính được thể tích khối tròn xoay khi quay miền  $D$  quanh  $Ox$  hay  $Oy$ , cách tốt nhất là ta nên vẽ hình, từ hình vẽ suy ra cách tính.

**II) Bài tập**

**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Tính thể tích các khối tròn xoay sinh ra khi quay miền  $D$  giới hạn bởi các đường sau quanh trục  $Ox$

- |   |  |
|---|--|
| 1. $y = \sin x; y = 0; x = 0; x = \pi$  | 8. $y = x^2$ và tiếp tuyến của nó tại điểm $A(2; 4)$ và trục $Oy$    |
| 2. $y = -x^2 + 2x; y = 0$               |  |
| 3. $y = x^2; y = 2x$                    | 9. $y = x^2; y = \frac{1}{2}x^2; y = 2x$                             |
| 4. $y = x^2 - 2x + 2; y = -x^2 - x + 3$ | 10. $y = \cos x$ , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2\pi$ . |
| 5. $y =  x^2 - 4x + 3 ; y = 0$          |  |
| 6. $y = x + 1; y = 3 - x; y = 0$        |  |
| 7. $y = x^2; y = 2 - x$                 |  |

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:**

**Câu 1.** Thể tích của khối tròn xoay khi quay quanh trục  $Ox$  hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  có công thức tính là:

**A.**  $V = \int_a^b f^2(x) dx$  **B.**  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$  **C.**  $V = \pi \int_a^b f(x) dx$  **D.**  $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx$

**Câu 2.** Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục  $Ox$  hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường sau:  $y = f(x)$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  ( $a < b$ ) là:

**A.**  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ . **B.**  $V = \int_a^b f^2(x) dx$ . **C.**  $V = \pi \int_a^b f(x) dx$ . **D.**  $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$ .

**Câu 3.** Thể tích khối tròn xoay sinh ra do quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x^3$ , trục  $Ox$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$  một vòng quanh trục  $Ox$  là:

- A.  $\pi$ .    B.  $2\pi$ .    C.  $\frac{6\pi}{7}$ .    D.  $\frac{2\pi}{7}$ .

**Câu 4.** Thể tích của khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi:  $y = \sin x$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 0, x = \pi$  là:

- A.  $\frac{\pi^2}{4}$ .    B.  $\frac{\pi^2}{2}$ .    C.  $\frac{\pi}{2}$ .    D.  $\frac{\pi^3}{3}$ .

**Câu 5.** Cho hai hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và thỏa mãn:  $0 < g(x) < f(x), \forall x \in [a; b]$ . Gọi V là thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường:  $y = f(x), y = g(x), x = a; x = b$ . Khi đó V được tính bởi công thức nào sau đây?

- A.  $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$ .    B.  $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$ .  
 C.  $V = \left\{ \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right\}^2$ .    D.  $V = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ .

**Câu 6.** Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi  $y = \ln x, y = 0, x = e$  là:

- A.  $\pi e$ .    B.  $\pi(e-1)$ .    C.  $\pi(e-2)$ .    D.  $\pi(e+1)$ .

**Câu 7.** Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong (C):  $y = \frac{2x+1}{x+1}$ , trục Ox và trục Oy. Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình (H) quay quanh trục Ox là:

- A.  $3\pi$ .    B.  $4\pi \ln 2$ .    C.  $(3 - 4 \ln 2)\pi$ .    D.  $(4 - 3 \ln 2)\pi$ .

**Câu 8.** Cho hình (H) giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{x}; x = 4$ ; trục hoành. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

- A.  $\frac{15\pi}{2}$ .    B.  $\frac{14\pi}{3}$ .    C.  $8\pi$ .    D.  $\frac{16\pi}{3}$ .

**Câu 9.** Thể tích khối tròn xoay khi cho Elip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  quay quanh trục Ox:

- A.  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ .    B.  $\frac{4}{3}\pi ab^2$ .    C.  $\frac{2}{3}\pi a^2 b$ .    D.  $-\frac{2}{3}\pi ab^2$ .

**Câu 10.** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong (L):  $y = x\sqrt{\ln(1+x^3)}$ , trục Ox và đường thẳng  $x = 1$ . Thể tích của vật thể tròn xoay tạo ra khi cho (H) quay quanh trục Ox là:

- A.  $V = \frac{\pi}{3}(\ln 4 - 1)$ .    B.  $V = \frac{\pi}{3}(\ln 4 + 2)$ .    C.  $V = \frac{\pi}{3}(\ln 3 + 2)$ .    D.  $V = \frac{\pi}{3} \ln 3$ .

**Câu 11.** Đề tìm diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C):  $y = x^3; y = 0; x = -1; x = 2$  một học sinh thực hiện theo các bước như sau:

Bước I.  $S = \left| \int_{-1}^2 x^3 dx \right|$     Bước II.  $S = \left| \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^2$     Bước III.  $S = \left| 4 - \frac{1}{4} \right| = \frac{15}{4}$

Cách làm trên đúng hay sai từ bước nào?

- A. Bước I.    B. Bước II.    C. Bước III.    D. Không có bước nào sai.

**Câu 12.** Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = x \ln x, y = 0, x = e$  có giá trị bằng  $\frac{\pi}{a}(b.e^3 - 2)$  trong đó a, b là hai số thực nào dưới đây?

- A.  $a = 27, b = 5$ .    B.  $a = 24, b = 6$ .    C.  $a = 27, b = 6$ .    D.  $a = 24, b = 5$ .

**PHIẾU HỌC TẬP SỐ 5**  
**ÔN TẬP HỆ TRỤC TỌA ĐỘ**

**Chú ý các công thức sau:**

1. Tích có hướng của hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  làm một vecto  $\vec{c}$ . Kí hiệu:  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \wedge \vec{b}$

Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ . Khi đó:  $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 a_3 - a_3 a_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1)$

2. Điều kiện đồng phẳng của ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  là  $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$

3. Diện tích tam giác ABC:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$

4. Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D':  $V = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA}'|$

5. Thể tích của tứ diện ABCD là  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$

**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 1:** Viết tọa độ của các vectơ sau đây:

$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}; \quad \vec{b} = 7\vec{i} - 8\vec{k}; \quad \vec{c} = -9\vec{k}; \quad \vec{d} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

**Bài 2:** Cho:  $\vec{a} = (2; -5; 3), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (1; 7; 2)$ . Tìm tọa độ của các vectơ  $\vec{u}$  với:

a)  $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + 3\vec{c}$       b)  $\vec{u} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$       c)  $\vec{u} = -4\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$  d)  $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$

**Bài 3:** Tính góc của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$

a)  $\vec{a} = (4; 3; 1), \vec{b} = (-1; 2; 3)$       b)  $\vec{a} = (2; 5; 4), \vec{b} = (6; 0; -3)$

**Bài 4:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Tìm  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ :

a)  $\vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (5; 1; 7)$     b)  $\vec{a} = (6; -2; 4), \vec{b} = (6; 33; 10)$     c)  $\vec{a} = (2; 3; 1), \vec{b} = (5; 6; 4)$

**Bài 5:** Cho điểm M. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M:

- Trên các mặt phẳng tọa độ: Oxy, Oxz, Oyz
- Trên các trục tọa độ: Ox, Oy, Oz

a)  $M(1; 2; 3)$       b)  $M(3; -1; 2)$       c)  $M(-1; 1; -3)$       d)  $M(1; 2; -1)$

**Bài 6:** Cho điểm M. Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm M:

- Qua gốc tọa độ
  - Qua mp(Oxy)
  - Qua trục Oy
- a)  $M(2; -5; 7)$       b)  $M(22; -15; 7)$       c)  $M(11; -9; 10)$       d)  $M(3; 6; 7)$

**Bài 7:** Cho ba điểm A, B, C biết  $A(1; 2; -3), B(0; 3; 7), C(12; 5; 0)$

- a. Chứng tỏ ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
- b. Tìm tọa độ trọng tâm G của  $\Delta ABC$ .
- c. Xác định điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.
- d. Tính số đo các góc trong  $\Delta ABC$ .
- e. Tính diện tích  $\Delta ABC$ . Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của  $\Delta ABC$ .

**Bài 8:** Cho bốn điểm A, B, C, D biết  $A(2; 5; -3), B(1; 0; 0), C(3; 0; -2), D(-3; -1; 2)$

- a. Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.
- b. Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD.
- c. Tính góc tạo bởi các cạnh đối diện của tứ diện ABCD.
- d. Tính thể tích của khối tứ diện ABCD.
- e. Tính diện tích tam giác BCD, từ đó suy ra độ dài đường cao của tứ diện vẽ từ A.

**Bài 9:** Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' biết  $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1; 1), C'(4; 5; -5)$

- a. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại.
- b. Tính thể tích khối hộp.

**Bài 10:** Trong không gian Oxyz cho:

- a. Ba điểm A(2; 5; 3), B(3; 7; 4); C(x; y; 6). Tìm x, y để ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- b. Ba điểm A(1; 1; 1), B(-1; 1; 0); C(3; 1; -1). Tìm điểm M thuộc mp(Oxz) sao cho M cách đều 3 điểm A, B, C
- c. Hai điểm A(-1; 6; 6), B(3; -6; -2). Tìm điểm M thuộc mp(Oxy) sao cho AM + BM là ngắn nhất.

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:**

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho biểu diễn của vectơ  $\vec{a}$  qua các vectơ đơn vị là  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{a}$  là **A.**  $(1; 2; -3)$ . **B.**  $(2; -3; 1)$ . **C.**  $(2; 1; -3)$ . **D.**  $(1; -3; 2)$ .

**Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; -2; 3)$ ,  $B(-1; 2; 5)$ ,  $C(1; 0; 1)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ ?

**A.**  $G(1; 0; 3)$ . **B.**  $G(3; 0; 1)$ . **C.**  $G(-1; 0; 3)$ . **D.**  $G(0; 0; -1)$ .

**Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A$ ,  $B$  với  $\vec{OA} = (2; -1; 3)$ ,  $\vec{OB} = (5; 2; -1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{AB}$ .

**A.**  $\vec{AB} = (3; 3; -4)$ . **B.**  $\vec{AB} = (2; -1; 3)$ . **C.**  $\vec{AB} = (7; 1; 2)$ . **D.**  $\vec{AB} = (-3; -3; 4)$ .

**Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

**A.**  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ . **B.**  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . **C.**  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ . **D.**  $\vec{b} \perp \vec{c}$ .

**Câu 5:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (2; -1; -1)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.**  $[\vec{a}, \vec{b}] = (-5; -7; -3)$ . **B.** Vectơ  $\vec{a}$  không cùng phương với vectơ  $\vec{b}$ .

**C.** Vectơ  $\vec{a}$  không vuông góc với vectơ  $\vec{b}$ . **D.**  $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ .

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$  và  $B(2; 1; 1)$ . Độ dài đoạn  $AB$  bằng

**A.** 2. **B.**  $\sqrt{6}$ . **C.**  $\sqrt{2}$ . **D.** 6.

**Câu 7:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{a} = (1; -2; 3)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{b}$  biết rằng vectơ  $\vec{b}$  ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$  và  $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ .

**A.**  $\vec{b} = (2; -2; 3)$ . **B.**  $\vec{b} = (2; -4; 6)$ . **C.**  $\vec{b} = (-2; 4; -6)$ . **D.**  $\vec{b} = (-2; -2; 3)$ .

**Câu 8:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(3; 2; 1)$ ,  $B(-1; 3; 2)$ ;  $C(2; 4; -3)$ . Tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  là

**A.** 2. **B.** -2. **C.** 10. **D.** -6.

**Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; -2; 3)$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm  $M$ . Tọa độ của điểm  $M$  là

**A.**  $M(1; -2; 0)$ . **B.**  $M(0; -2; 3)$ . **C.**  $M(1; 0; 0)$ . **D.**  $M(1; 0; 3)$ .

**Câu 10:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(0; -1; 1)$ ,  $B(-2; 1; -1)$ ,  $C(-1; 3; 2)$ . Biết rằng  $ABCD$  là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm  $D$  là:

**A.**  $D\left(-1; 1; \frac{2}{3}\right)$ . **B.**  $D(1; 3; 4)$ . **C.**  $D(1; 1; 4)$ . **D.**  $D(-1; -3; -2)$ .

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(1; 1; -3)$ ,  $B(3; -1; 1)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ , đoạn  $OM$  có độ dài bằng

**A.**  $\sqrt{5}$ . **B.**  $\sqrt{6}$ . **C.**  $2\sqrt{5}$ . **D.**  $2\sqrt{6}$ .

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(3; 2; -1)$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  lên trục  $Oz$  là điểm:

**A.**  $M_3(3; 0; 0)$ . **B.**  $M_4(0; 2; 0)$ . **C.**  $M_1(0; 0; -1)$ . **D.**  $M_2(3; 2; 0)$ .

**Câu 13:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(2; 0; 0)$ ,  $C(0; 2; 0)$  và  $A'(0; 0; 2)$ . Góc giữa  $BC'$  và  $A'C$  là

**A.**  $45^\circ$ . **B.**  $60^\circ$ . **C.**  $30^\circ$ . **D.**  $90^\circ$ .

**Câu 14:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;0;0)$ ,  $B(3;2;4)$ ,  $C(0;5;4)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}|$  nhỏ nhất.

- A.  $M(1;3;0)$ .                      B.  $M(1;-3;0)$ .                      C.  $M(3;1;0)$ .                      D.  $M(2;6;0)$ .

**Câu 15:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$ . Biết  $A(2;1;-3)$ ,  $B(0;-2;5)$  và  $C(1;1;3)$ . Diện tích hình bình hành  $ABCD$  là

- A.  $2\sqrt{87}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{349}}{2}$ .                      C.  $\sqrt{349}$ .                      D.  $\sqrt{87}$ .

**Câu 16:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0;2;-4)$ ,  $B(-3;5;2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  sao cho biểu thức  $MA^2 + 2MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.  $M(-1;3;-2)$ .                      B.  $M(-2;4;0)$ .                      C.  $M(-3;7;-2)$ .                      D.  $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; -1\right)$ .

**Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (2; m-1; 3)$ ,  $\vec{b} = (1; 3; -2n)$ . Tìm  $m, n$  để các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng.

- A.  $m = 7; n = -\frac{3}{4}$ .                      B.  $m = 7; n = -\frac{4}{3}$ .                      C.  $m = 4; n = -3$ .                      D.  $m = 1; n = 0$ .

**Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a}, \vec{b}$  tạo với nhau 1 góc  $120^\circ$  và  $|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 5$ . Tìm  $T = |\vec{a} - \vec{b}|$ .

- A.  $T = 5$ .                      B.  $T = 6$ .                      C.  $T = 7$ .                      D.  $T = 4$ .

**Câu 19:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (1; 2; 1)$ ,  $\vec{b} = (-1; 1; 2)$ ,  $\vec{c} = (x; 3x; x+2)$ . Nếu 3 vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng thì  $x$  bằng ?

- A. 2.                      B. 1.                      C. -2.                      D. -1.

**Câu 20:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(1;2;0)$ ,  $B(3;-1;1)$ ,  $C(1;1;1)$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$ .    A.  $S = 1$ .                      B.  $S = \frac{1}{2}$ .                      C.  $S = \sqrt{3}$ .                      D.  $S = \sqrt{2}$ .

**Câu 21:** Trong không gian  $Oxyz$  cho  $A(1;-1;2)$ ,  $B(-2;0;3)$ ,  $C(0;1;-2)$ . Gọi  $M(a;b;c)$  là điểm thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho biểu thức  $S = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} + 3\overline{MC} \cdot \overline{MA}$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $T = 12a + 12b + c$  có giá trị là

- A.  $T = 3$ .                      B.  $T = -3$ .                      C.  $T = 1$ .                      D.  $T = -1$ .

**Câu 22:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\overline{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $B(-2; 2; 0)$  và  $C(4;1;-1)$ . Trên mặt phẳng  $(Oxz)$ , điểm nào dưới đây cách đều ba điểm  $A, B, C$ .

- A.  $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$ .                      B.  $N\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$ .                      C.  $P\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$ .                      D.  $Q\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$ .

**Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;2;-1)$ ,  $B(2;-1;3)$ ,  $C(-4;7;5)$ .

Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là

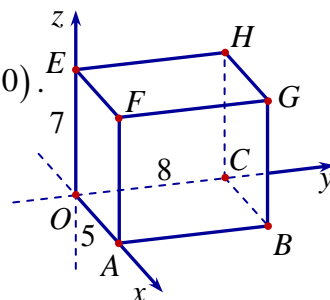
- A.  $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ .                      B.  $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$ .                      C.  $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .                      D.  $(-2; 11; 1)$ .

**Câu 24:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3;5;-1)$ ,  $B(1;1;3)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $(Oxy)$  sao cho  $|\overline{MA} + \overline{MB}|$  nhỏ nhất ?

- A.  $(-2; -3; 0)$ .                      B.  $(2; -3; 0)$ .                      C.  $(-2; 3; 0)$ .                      D.  $(2; 3; 0)$ .

**Câu 25:** Trong không gian  $Oxyz$  cho hình hộp chữ nhật  $OABC.EFGH$  có các cạnh  $OA = 5$ ,  $OC = 8$ ,  $OE = 7$  (xem hình vẽ). Hãy tìm tọa độ điểm  $H$ .

- A.  $H(0;7;8)$ .                      B.  $H(7;8;0)$ .                      C.  $H(8;7;0)$ .                      D.  $H(0;8;7)$ .



**PHIẾU HỌC TẬP SỐ 6**  
**PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU**

**A. BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 1:** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu. Tìm tâm và bán kính của mặt cầu đó?

1/  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 8z + 1 = 0$

2/  $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z + 30 = 0$

3/  $x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$

4/  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 3y + 5z - 2 = 0$

5/  $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - 8z + 25 = 0$

**Bài 2:** Tìm điều kiện của tham số để các phương trình sau là phương trình của mặt cầu:

1/  $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$

2/  $x^2 + y^2 + z^2 + 2(1 + \cos\alpha)x - 4y - (2\cos\alpha)z + 7 + \cos 2\alpha = 0$

3/  $x^2 + y^2 + z^2 - (2\ln a)x + 2y - 6z + 3\ln a + 8 = 0$

**Bài 3:** Viết phương trình mặt cầu (S), biết:

1/ Tâm I(3; 2; -1), bán kính R = 3.

2/ Tâm I(1; 0; -1), đường kính = 8.

3/ Đường kính là AB, với A(-1; 2; 1), B(0; 2; 3)

4/ đi qua 4 điểm A(1; 1; 1), B(1; 2; 1), C(1; 1; 2), D(2; 2; 1)

5/ Tâm I(-4; 7; 5) và tiếp xúc với mặt phẳng Oxz

6/ đi qua hai điểm A(3; -1; 2), B(1; 1; -2) và có tâm thuộc trục Oz

7/ đi qua ba điểm A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3) và có tâm thuộc mặt phẳng Oxy.

**B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:**

**Câu 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(2;4;1), B(-2;2;-3). Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A.  $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$

B.  $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$

C.  $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3$

D.  $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$

**Câu 2.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S):  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$ . Bán kính R của mặt cầu:

A.  $R = \sqrt{17}$

B.  $R = \sqrt{88}$

C.  $R = 2$

D.  $R = 5$

**Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình mặt cầu có tâm I(4;-1;3) và bán kính  $\sqrt{5}$  là:

A.  $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 5$

B.  $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25$

C.  $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{5}$

D.  $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 5$

**Câu 4** Trong không gian Oxyz, tâm I của mặt cầu (S):  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$  có tọa độ là:

A. I(4;1;0)

B. I(4;-1;0)

C. I(-4;1;0)

D. I(-4;-1;0)

**Câu 5.** Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm I(1;1;2) và đi qua A(-2;1;6) có phương trình là :

A.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 25$

B.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5$

C.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$

D.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 5$

**Câu 6.** Trong không gian Oxyz, mặt cầu đi qua bốn điểm  $A(6;-2;3), B(0;1;6), C(2;0;-1), D(4;1;0)$  có phương trình là:

A.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$

B.  $2x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$

C.  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z - 3 = 0$

D.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 3 = 0$

**Câu 7.** Trong không gian Oxyz cho bốn điểm  $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), O(0;0;0)$ . Khi đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC có phương trình là:

A.  $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0$

B.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$

C.  $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$

D.  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 0$

**Câu 8.** Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S):  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$  và ba điểm  $O(0;0;0), A(1;2;3), B(2;-1;-1)$ . Trong ba điểm trên số điểm nằm bên trong mặt cầu là:

A. 1

B. 2

C. 0

D. 3

**Câu 10.** Trong không gian Oxyz, cho 4 điểm  $A(1,0,0); B(0,1,0); C(0,0,1); D(1,1,1)$ . Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có bán kính bằng:

A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

B.  $\sqrt{2}$ .

C.  $\sqrt{3}$ .

D.  $\frac{3}{4}$

**Câu 11.** Cho mặt cầu (S):  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  có tâm I và bán kính R là:

A.  $I(1;-2;0), R = 2$

B.  $I(1;-2;1), R = 2$

C.  $I(1;-2;1), R = \sqrt{6}$

D.  $I(1;-2;0), R = \sqrt{6}$

**Câu 12.** Cho mặt cầu (S) có tâm I nằm trên mặt phẳng (xOy) và đi qua 3 điểm  $A(1,2,-4); B(1,-3,1); C(2,2,3)$ . Toạ độ tâm I là:

A.  $(-2,1,0)$ .

B.  $(0,0,-2)$ .

C.  $(2,-1,0)$ .

D.  $(0,0,1)$ .

**Câu 13.** Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu (S) qua ba điểm  $A(1;-2;4), B(1;3;-1), C(2;-2;-3)$  và có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy là:

A.  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 21 = 0$

B.  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 3z - 21 = 0$

C.  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 21 = 0$

D.  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 21 = 0$

**Câu 14.** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm  $A(1;2;0), B(-3;4;2)$  và I là điểm thuộc trục Ox. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A, B là:

A.  $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 20$

B.  $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 20$

C.  $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = \frac{11}{4}$

D.  $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 20$

**Câu 15.** Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S):  $x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$  có bán kính nhỏ nhất khi m bằng:

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 0

**Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, giá trị của tham số m để phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 8m + 37 = 0$  là phương trình của mặt cầu:

**A.**  $m < -2$  hay  $m > 4$       **B.**  $m < -4$  hay  $m > 2$       **C.**  $m < -4$  hay  $m > -2$       **D.**  $m \leq -2$  hay  $m \geq 4$ .

**Câu 17.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm  $M(1; -1; 3)$  và mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$ . Khẳng định đúng là:

**A.** M nằm ngoài  $(S)$       **B.** M nằm trong  $(S)$       **C.** M nằm trên  $(S)$       **D.** M trùng với tâm của  $(S)$

**Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(3; -2; 4)$  và tiếp xúc với trục Oy. Viết phương trình của mặt cầu  $(S)$ .

**A.**  $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 25$       **B.**  $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 45$

**C.**  $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 25$       **D.**  $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 54$

**Câu 19.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu có phương trình là  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 4z = 0$ . Biết  $OA$ , ( $O$  là gốc tọa độ) là đường kính của mặt cầu  $(S)$ . Tọa độ điểm  $A$  là:

**A.**  $A(-1; 3; 2)$       **B.**  $A(-1; -3; 2)$       **C.**  $A(2; -6; -4)$       **D.**  $A(-2; 6; 4)$

**Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu:

**A.**  $x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 8y + 2z - 1 = 0$       **B.**  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 6y + 4z - 1 = 0$

**C.**  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 6y + 4z + 9 = 0$       **D.**  $x^2 + (y-z)^2 - 2x - 4(y-z) - 9 = 0$

**Câu 21.** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu  $(S): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12x - 4y + 4 = 0$ . Mặt cầu  $(S)$  có đường kính AB. Biết điểm  $A(-1; -1; 0)$  thuộc mặt cầu  $(S)$ . Tọa độ điểm B là

**A.**  $B(-5; 3; -2)$       **B.**  $B(-11; 5; 0)$       **C.**  $B(-11; 5; -4)$       **D.**  $B(-5; 3; 0)$

**Câu 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm  $A(2; 1; -3), B(4; 3; -2), C(6; -4; -1)$ . Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua trọng tâm G của tam giác ABC là:

**A.**  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 6$       **B.**  $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$

**C.**  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$       **D.**  $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$

**Câu 23** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-1; 4; 2)$ , biết thể tích khối cầu bằng  $972\pi$ . Khi đó phương trình của mặt cầu  $(S)$  là:

**A.**  $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$       **B.**  $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$

**C.**  $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 81$       **D.**  $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9$

**Câu 24** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm  $A(1; 2; 5), B(2; 1; 1)$  và  $C(0; 0; 3)$ . Phương trình mặt cầu  $(S)$  có tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng 3.

**A.**  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 3$       **B.**  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$

**C.**  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9$       **D.**  $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 3$

**Câu 25** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1; 3; -2)$ , biết diện tích mặt cầu bằng  $100\pi$ . Khi đó phương trình của mặt cầu  $(S)$  là:

**A.**  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 4 = 0$       **B.**  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 86 = 0$

**C.**  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 9 = 0$       **D.**  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 11 = 0$



